Mathematische Methoden LA

- WS 2019/2020 -

Übungsblatt 12 (20 Punkte)

Ausgabe 23.01.2020 – Abgabe 30.01.2020 – Besprechung n.V.

Aufgaben mit Sternchen sind Klausurisomorph

▷ **Aufgabe 1** (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto= x^2$ auf dem Intervall $]-\pi,\pi]$. Die periodische Fortsetzung der Funktion ist eine stückweise stetige Funktion mit Knicken bei $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$ (Skizze?) Der Differenzenquotient ist aber bei jedem dieser Knicke beschränkt, $|f(x_0+\tau) - f(x_0)| \leq C|\tau|$, im vorliegenden Fall $C = 2\pi$. Gemäß Vorlesung konvergiert $S_N f$ für $N \to \infty$ punktweise gegen x^2.

(a) Zeigen Sie

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{-1}{n^2}\cos(nx)\,, \qquad x \in [-\pi,\pi]\,. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{2}$$

Hinweis: Betrachten Sie mal Gl. (1) für $x = \pi$ und $x = 0 \dots$

▷ **Aufgabe 2** (10 Punkte)

Der Dirichletkern, daran sei erinnert, ist definiert

$$D_N(x - x') := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-x')}\,. \tag{3}$$

(a) Beweisen Sie

$$D_N(x-x') = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}](x-x')\right)}{\sin(\frac{1}{2}(x-x'))} \tag{4}$$

und skizzieren Sie Funktionsgraphen für für festes x' und $N = 1, 2, 10$. Wie würden Sie die Funktion $D_N(x-x')$ für große N in wenigen Worten charakterisieren?

Hinweis: Der Dirichletkern ist ein trigonometrischen Polynom, allerdings ein besonders einfaches: alle Koeffizienten sind gleich. Bevor Sie hier Ihre Formelsmmlung bemühen um die Reihe in eine geschlosse Form zu bringen, setzen Sie abkürzend $\tau := x - x'$, vergewissern sich $e^{in\tau} = (e^{i\tau})^n$, setzen abkürzend $q := e^{in\tau}$, und rufen ihre Kenntnisse die geometrische Reihe betreffend auf: $(1+q+q^2+\ldots+q^m)(1-q) = 1-q^{m+1}$ bzw $\sum_{n=0} mq^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$, die Formel für die endliche geometrische Reihe. Damit ausgerüstet sollten Sie den Beweis führen Können .... Ach ja – und dass die Summe bei $-N$ los geht sollte Sie nicht irritieren. Schreiben Sie doch einfach $q^n = q^{-N}q^{n+N}$, und dann geht doch die Summe über $n+N$ bei Null los ...

(b) Beweisen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left([N+\frac{1}{2}]\tau\right)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} = 1 \tag{5}$$

Hinweis: Benutzen Sie doch einfach die Definition (3) und integrieren die rechte Seite gliedweise . . . .